Wiskunde construct van ons denken of zoektocht naar objectieve waarheid?

Impliceren Gödel's onvolledigheidstellingen platonisme?

Norbert van Ettinger / 0244236 / niv. 3 / voortgezette logica deeltijd

Inleiding : In 1931 bewees Kurt Gödel twee stellingen over de volledigheid en consistentie van de eerste orde rekenkunde. De stellingen komen er in het kort op neer dat elk redelijk wiskundig systeem dat kan worden uitgedrukt in eerste orde logica, in zoverre het de logica betreft, incompleet is en hierbinnen niet bewijsbaar consistent. Deze twee stellingen sloegen bij velen in als een bom in een tijd dat de wiskunde reeds in een grondslagen crisis verkeerde. De drie indertijd meest voorname filosofische posities met elke hun eigen visies op de grondslagen van de wiskunde waren Formalisme, Logicisme en Intuïtionisme. Het Intuïtionisme van Brouwer en Heyting (een constructivisme) beschouwt de wiskunde als een mentaal product. Het Logicisme van Frege en Russell is de visie die ervan uit gaat dat de wiskunde is te reduceren tot logica. Het door de Wiener Kreiz verdedigde Conventionalisme, een uitbreiding op het Logicisme, ziet in de wiskunde niets anders dan analytisch a-priori uitspraken gebaseerd op linguïstische conventies. En het Formalisme met Hilbert als belangrijkste proponent, verdedigt de visie dat wiskunde het manipuleren van symbolen betreft, waarbij de semantiek, de betekenis van de (ongeïnterpreteerde) symbolen, geheel gelegen is in de syntactische[1] regels die de relaties tussen de symbolen geven.
Gödel nam een aparte positie in. Hoewel hij veel verkeerde in de kring van de Wiener Kreiz, had hij zijn hart verpand aan het mathematisch platonisme (conceptueel realisme). In deze filosofische visie is de wiskunde noch een creatie van de geest, noch een construct van analytische a-priori uitspraken en linguïstische conventies, doch beschrijft het een onafhankelijk van de mens bestaande abstracte objectieve realiteit. Consequentie hiervan is dat wiskundige waarheden dan niet worden gecreëerd, maar ontdekt en beschreven, en dat de wiskundige concepten niet leeg van inhoud zijn maar naar objecten in een niet-ruimtelijke tijdloze wereld verwijzen. In het platonisme krijgen wiskundige entiteiten, omdat er een 'objectieve existentie' aan wordt toegeschreven, een ontologische status toegekend.
"Gödel's wilde met zijn onvolledigheidstellingen de filosofische positie van het wiskundig platonisme bewijzen", zo zegt Rebecca Goldstein in haar boek getiteld "Completeness"[2]. In dit paper wil ik bekijken in hoeverre Gödel hierin geslaagd is. De vraagstelling die ik wil beantwoorden luidt dan ook;

- Maken de onvolledigheidstellingen het onaannemelijk dat wiskunde slechts onze creatie is, en dwingen ze ons tot de filosofische opvattingen van het wiskundig platonisme?

Primaire aanleiding van dit paper vormen de Gibbs lezingen gegeven door Kurt Gödel waarvan "introductory Note to some basic theorems on the foudation of mathematics"[3] een verslag vormt. In deze lezingen gaf Gödel zijn visie op de filosofische consequenties van de onvolledigheidstellingen.
In dit paper bespreek ik allereerst een argument van Gödel waarin wiskundig platonisme als enige plausibele filosofische visie wordt geïmpliceerd. Het is een argument dat is gebaseerd op zijn aanname dat een schepper de eigenschappen van zijn creatie zal kennen. Vervolgens kijken we naar alternatieve filosofische opvattingen over de wiskunde, met als doel te achterhalen of deze opvattingen minder plausibel worden door de consequenties van de onvolledigheidstellingen. Deze filosofische opvattingen betreffen de constructivistische wiskundige filosofieën , het formalisme en het intuïtionisme, en vervolgens wat, afgezien van het platonisme, ook tot het wiskundig realisme wordt gerekend, het Logicisme, Conventionalisme en wiskundig Empirisme.
Ik zal echter beginnen met een korte uitleg van hetgeen in dit paper een centrale rol speelt, namelijk de onvolledigheidstellingen.

Gödel's onvolledigheidstellingen[4]

De eerste onvolledigheidstelling stelt dat een formeel consistent systeem een ware propositie kent welke binnen dit systeem niet bewijsbaar is. De tweede stelling zegt dat de consistentie van een formeel consistent systeem niet met formaliseerbare middelen binnen het systeem kan worden bewezen. Gödel leverde in 1931 voor beide stellingen het bewijs. Ik geef hiervan de volgende ruwe bewijsschets.

Uitgangspunt van Gödel was om een waterdichte versie van de leugenaarparadox te produceren. Er is een zin die zegt "ik ben niet waar". Zal deze zin geproduceerd worden door een geautomatiseerd bewijssysteem dat alleen ware zinnen produceert?
Nu had Tarski al eerder aangetoond dat het concept waarheid niet adequaat op deze wijze kan worden gepresenteerd. De oplossing van Gödel was om niet over waarheid maar over bewijsbaarheid te spreken. De zin luidt dan, "deze zin is niet bewijsbaar".
Neem een geautomatiseerd machine welke uit een verzameling van axioma's, alle hieruit af te leiden ware zinnen als output naar buiten brengt. Dus telkens als de machine weer de waarheid van een volgende zin heeft bewezen, dan print deze machine die zin. Het aantal ware zinnen kan oneindig zijn, dus we laten de machine maar zinnen produceren. Neem nu de zin "ik ben niet bewijsbaar". Zal de machine ooit deze zin bewijzen en uitprinten? Als we deze zin overwegen en ons door alle mogelijkheden werken, dan strepen we de mogelijkheden weg dat deze onwaar en bewijsbaar is, onwaar en onbewijsbaar, waar en bewijsbaar, en worden we aldus geleid naar de conclusie dat deze zin weliswaar onbewijsbaar is, maar toch waar.

De zojuist gegeven demonstratie was in het Nederlands. Het door Gödel geleverde bewijs van zijn onvolledigheidstellingen was echter geformuleerd in Peano rekenkunde. De onvolledigheidstellingen van Gödel zijn dan ook van toepassing op elementaire getallen theorie ("eerste orde Rekenkunde", en Peano is zo'n rekenkunde), geformuleerd in "Eerste-orde logica".

Maar als je een bewijssysteem opzet om met zinnen als 'ik ben niet bewijsbaar' om te kunnen gaan, dan moet je een methode vinden om de zin over zichzelf te laten praten.
De door Gödel nu geleverde prestatie was gelegen in het feit dat hij een bewijssysteem in Peano realiseerde waarin zinnen naar zichzelf kunnen verwijzen. Via een getalsmatige codering (denk aan bijvoorbeeld ASCI) worden alle zinnen van dit bewijssysteem gecodeerd in natuurlijke getallen. Aan elke gecodeerde zin wordt vervolgens een getal (Gödel getal genaamd) toegekend. Dit Gödel-getal komt terug in de zin zelf met als resultaat dat de zin zelfreferentieel is geworden (over zichzelf kan praten). Dus;

Zin nô ; $\exists x\ Proof_T\ (x,y)$

Hierin is x de code van het bewijs in Taal T, y de code van de conclusie uit het bewijs. Het zin nummer wordt daarbij ingevoerd in de zin zelf zodat de zin over zichzelf kan praten.

De notie van bewijsbaarheid wordt dan verder als volgt gecodeerd in getallen;

Bewijsbaar ; BewT(y) ; = $\exists x\ Proof_T\ (x,y)$

Voor y nemen we λ, de zin "Ik ben niet bewijsbaar",

Dus; $\lambda \Leftrightarrow \sim BewT(\ulcorner \lambda \urcorner)$
Waarin $\ulcorner \lambda \urcorner$ de code (het Gödel getal) is welke bij de zin λ hoort.

De vraag is nu of het ware zinnen producerende geautomatiseerde systeem ook deze λ zal produceren.

Stel nu dat het systeem de zin λ "Ik ben niet bewijsbaar" produceert.
Dus ; $T \vdash \lambda$, m.a.w. $T \vdash$ "$T \vdash \lambda$", i.e. $T \vdash BewT(\ulcorner \lambda \urcorner)$.
Maar omdat geldt $\lambda \Leftrightarrow \sim BewT(\ulcorner \lambda \urcorner)$, krijgen we $T \vdash \sim\lambda$, mar we waren juist uitgegaan van $T \vdash \lambda$ dus $T \vdash \perp$.
Doch het systeem is consistent en produceert alleen ware zinnen. Dus de conclusie is dat het systeem de zin λ (= "ik ben niet bewijsbaar") niet zal produceren / bewijzen. Maar juist omdat het systeem de zin niet zal produceren (niet bewijst) is de zin de-facto waar.

De hieruit afgeleide eerste onvolledigheidstelling van Gödel luidt;

- Voor elk willekeurig consistent formele theorie welke rekenkundige waarheden produceert, is het mogelijk een rekenkundig statement (de Gödel-zin) te construeren welke waar is, maar niet bewijsbaar in de theorie. Dwz elke consistente theorie van een zekere expressieve kracht is incompleet.

Voor de goede orde, dit is niet wat in Gödel's paper *"On Formally Undecidable Propositions in principia Mathematica and Related Systems I*" van 1931 stond. Gödel's Theorema verschijnt hierin als propositie VI . Het vermeld;

"To every ω-consistent[5] recursive class k of formulae there corresponds recursive class signs r such that neither v Gen r nor Neg(v Gen r) belongs to Flg(k) (where v is the free variable of r)"

Vrij 'vertaald' ; Het Gödel statement G kan worden uitgedrukt in *'G kan niet waar worden bewezen'*. Als G waar bewezen zou worden onder de axioma's van de theorie, dan zou de theorie een theorema G hebben welke zichzelf tegenspreekt. Een gelijksoortige contradictie zou optreden als G onwaar zou worden bewezen. Dus worden we gedwongen te concluderen dat G niet waar of onwaar kan worden bewezen, maar waar is vanwege dit feit.

Het bewijs van de tweede onvolledigheidsstelling uit de eerste kan als volgt worden gegeven; Laat λ de onbeslisbare zin zijn zoals hierboven geconstrueerd, en laat ons nu eens aannemen dat de consistentie van het systeem in het systeem zelf kan worden bewezen. We hebben hierboven gezien dat als het systeem consistent is, dat dan λ niet bewijsbaar is. Het bewijs van deze implicatie kan binnen het systeem zelf worden geformaliseerd, zodat het statement "λ is niet bewijsbaar" ofwel "~Bew (λ)" binnen het systeem kan worden bewezen. Maar dit laatste statement is equivalent aan λ zelf, (en deze equivalentie kan binnen het systeem worden bewezen), dus λ kan worden bewezen in het systeem. Maar dat zou dan tonen dat het systeem inconsistent is. Daar echter het systeem consistent wordt verondersteld, kan het dus niet een bewijs geven voor zijn eigen consistentie.

De tweede onvolledigheidstelling luidt;

- De consistentie van een formeel consistent systeem kan niet worden bewezen met formaliseerbare middelen binnen het systeem.

Opmerkingen betreffende Gödel's eerste onvolledigheidstellingen

De volgende kanttekeningen kunnen worden gemaakt bij de volledigheidsstellingen;

- Het theorema impliceert niet dat elk interessant axioma-systeem incompleet is. Zo kan de Euclidische geometrie zo worden geaxiomatiseerd dat het een compleet systeem is.
- Het theorema is alleen van toepassing op eerste orde rekenkunde (i.e. elementaire getallen theorie, geformuleerd in eerste orde logica), en alle wiskundige systemen die daarin kunnen worden uitgedrukt.
- Het theorema is alleen van toepassing op systemen die "recursief axiomatiseerbaar" zijn. Dwz een computer moet er zodanig mee geprogrammeerd kunnen worden dat deze uit elk gegeven axioma, door middel van elke juist gespecificeerde afleidingsregels, al die formules kan produceren welke "logisch geldig" zijn (dwz waar onder elke redelijke interpretatie).
- Het theorema is alleen van toepassing op systemen welke worden gebruikt als hun eigen bewijssysteem. Van een systeem S kan met een krachtiger systeem de waarheidswaarde van een onbeslisbare zin binnen S, worden bewezen. Alleen moet dan de consistentie van dit krachtiger systeem onafhankelijk van S worden bewezen / aangenomen.

Argument van Gödel tegen de stelling dat de wiskunde onze creatie is.

In zijn lezing *"Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their implications"* geeft Kurt Gödel een argument waarvan de conclusie is dat de onvolledigheidstelling het onaannemelijk maakt dat wiskunde slechts onze creatie is. Dit argument kan schematisch worden weergegeven in de volgende stappen;

1) Een formeel consistent systeem kent een ware propositie (de onbeslisbare Gödel-zin) welke niet binnen dit systeem bewijsbaar is. (Gödel's 1ste onvolledigheidstelling), en als gevolg hiervan kan de consistentie van het systeem niet worden bewezen met formaliseerbare middelen binnen het systeem. (Gödel's 2de onvolledigheidstelling)
2) Als ons vermogen voor het bewijzen van feiten over natuurlijke getallen adequaat kan worden gerepresenteerd door een Türinger-machine, (een formeel consistent systeem) dan is er (a.g.v. de eerste Gödelstelling) een ware propositie over deze natuurlijke getallen die niet door ons vermogen geproduceerd (bewezen) kan worden.
3) A.g.v. 1 en 2 kan de mens niet alle eigenschapen van de feiten over de wiskunde (als formeel systeem) van de natuurlijke getallen kennen. [dwz. de mens (op zijn minst voorgesteld als Türinger-machine) kan van de wiskunde als formeel systeem niet alle ware uitspraken kennen, en niet aantonen (bewijzen) dat de wiskunde consistent]
4) Een schepper kent noodzakelijk alle eigenschappen van zijn creaties, daar ze geen andere eigenschappen kunnen hebben dan de schepper ze gegeven heeft.
5) Derhalve kan de wiskunde geen creatie van onszelf zijn, want hoe kunnen wij het zijn die de waarheid bracht in een of ander propositie in afwezigheid van een bewijs voor die propositie.

Ad 1) We beginnen met de onvolledigheidsstellingen. Hoe moeten we deze interpreteren? Er is een zin die niet bewijsbaar is maar toch waar is, zo wordt gesteld. Maar als een bewijs binnen het formele systeem niet gegeven kan worden hoe komen we dan tot de conclusie dat deze zin toch waar is.
En wat is dat voor een zin die niet bewezen kan worden. Het is de zin "Ik ben niet bewijsbaar". Dus een zin die naar zichzelf verwijst.
Laten we eerst even kijken naar de leugenaarparadox.
Heel lang heeft men zich het hoofd gebogen over de leugenaarparadoxen. Vele varianten zijn ervan bekend. De eenvoudigste is wel zo'n beetje "wat hier staat is onwaar", of "wat ik nu zeg is onwaar". In al deze gevallen ontstaan de paradoxen omdat het mogelijk lijkt te zijn dat de zin in kwestie waar is desda deze onwaar is. Veel oplossingen voor de leugenaarparadox zijn aangedragen. De meeste van de oplossingen vallen in een van de drie groepen; a) sommigen beweren dat de "leugenaarzinnen" betekenisloos zijn, op grond van het feit dat het niet zinnig is te veronderstellen dat één deel van de zin verwijst naar de zin waarvan het een onderdeel is. B) anderen beweren dat de zin betekenisvol is doch waar noch onwaar, c) weer anderen menen dat de zin onwaar is en trachten dan de argumenten te weerleggen die ontworpen zijn om aan te tonen dat als ze onwaar zijn dat ze waar zijn[6].

Laten we eens wat dieper ingaan op de eerste oplossing, dus waarbij het niet zinnig is om te veronderstellen dat één deel van de zin verwijst naar de zin waarvan het een onderdeel is. In feite begeven we ons op het meta-logisch niveau als we een zin iets over zichzelf laten zeggen.
Wittgenstein had zo zijn bedenkingen tegen dit soort van meta-systematische beschouwingen.
Hij stond dan ook nogal vijandig tegenover de onvolledigheidstellingen. Hij noemde het *"logische Kunststücken"*. Een eerste bezwaar zou teruggaan op de Tractatus. Net als Frege en Russel verdedigde Wittgenstein de idee dat logica het systeem is en dat alles wat kan worden gezegd, gezegd moet worden binnen dit systeem. Een gevolgtrekking is dat er geen metasystematische vragen kunnen worden gesteld.

"De logica vult de grenzen van de wereld; de grenzen van de wereld zijn ook haar grenzen. We kunnen dus in de logica niet zeggen : dit en dit bestaat in de wereld en dit niet. Zulks zou namelijk schijnbaar veronderstellen dat we bepaalde mogelijkheden zouden uitsluiten en dit kan niet het geval zijn, omdat de logica anders de grenzen van de wereld zou moeten overschrijden. [Tractatus 5.61]"

En beschouw het volgende commentaar van Wittgenstein op de onvolledigheidstelling;

"Ik stel me voor dat iemand mij om advies vraagt; "Ik heb een propositie geconstrueerd (ik zal 'P' gebruiken om 'm aan te duiden), en door middel van een zekere definitie en transformatie kan het zo worden geïnterpreteerd dat het zegt: 'P is niet bewijsbaar' in Russel's systeem. Moet ik dan niet zeggen dat deze propositie aan de ene kant waar is, en aan de andere kant onbewijsbaar? Want stel

dat deze onwaar is; dan is het waar dat het bewijsbaar is. En dat kan toch zeker niet! En als het wordt bewezen, dan wordt bewezen dat het niet bewijsbaar is. Dus het kan alleen waar zijn, maar onbewijsbaar.

Net zo als we ons afvragen 'bewijsbaar in welk systeem?' zo moeten we ons ook afvragen 'waar in welk systeem?' 'waar in Russell's systeem' betekent, zoals was gezegd, bewezen in Russell's systeem, en 'onwaar in Russell's systeem' betekent dat het tegenovergestelde is bewezen in Russell's systeem – Wat betekent nu jouw 'neem aan dat het onwaar is'? In de betekenis van Russell betekent het 'neem aan dat het tegenovergestelde is bewezen in Russell's systeem'; als dat jouw aanname is zal je vermoedelijk jouw interpretatie opgeven dat het onbewijsbaar is. En met 'deze interpretatie' begrijp ik de vertaling in deze [Nederlandse] zin. – als je aanneemt dat de propositie bewijsbaar is in Russell's systeem, dat betekent dat het waar is in de Russelliaanse betekenis, dan moet de interpretatie 'P is niet bewijsbaar' ook worden opgegeven. Als je aanneemt dat de propositie waar is in de Russelliaanse betekenis, dan volgt hetzelfde. Verder; als de propositie verondersteld wordt onwaar te zijn in een ander dan de Russelliaanse betekenis, dan is dat niet in strijd als het in het Russell's systeem is bewezen. (Wat 'verliezen' wordt genoemd in schaken kan winnen constitueren in een ander spel[7]).

Wittgenstein in zijn tweede periode meende dat de betekenis van woorden verleend worden door de regels van het gebruik voor die woorden in een specifieke context. Als illustratie en analogie hiervan noemde hij het woord 'spelen'. Als we goed kijken zien we dat het woord voor zeer uiteenlopende activiteiten en spelregels wordt gebruikt met vrijwel niets wat gemeenschappelijk is voor allen. Wittgensteins uitspraak *"Net zo als we ons afvragen 'bewijsbaar in welk systeem?' zo moeten we ons ook afvragen 'waar in welk systeem?"* lijkt te impliceren dat we er rekening mee moeten houden dat elke context zijn eigen betekenis van de woorden 'bewijsbaar' en 'waar' met zich meebrengt. Veronderstellen we een soort uniform gebruik, ongeacht de context, dan kan zoiets leiden tot taalverwarring en pseudo-uitspraken.
Juliet Floyd en Hillary Putnam hebben in *"a note on Wittgensteins 'notorious paragraph' about the Gödel theorem[8]"* een analyse gemaakt van wat Wittgenstein hier nu wil zeggen. Voor hun argumenten wordt verwezen naar hun artikel of de eindnoot[9] maar hun conclusie is dat Wittgenstein hier wees op het volgende;

Wittgenstein's doel is niet het weerleggen van Gödel's theorema's maar het 'by-passen' ervan. Volgens Floyd en Putnam wil Wittgenstein, op goede gronden, zeggen dat de vertaling van P in gewone proza, dwz *'P is niet bewijsbaar'*, onhoudbaar is. Dit heeft daarbij overigens geen invloed op de correctheid van Gödel's bewijs, daar niets in dat bewijs om vertaling in gewone 'proza' draait.

"Wat Wittgenstein wilde laten zien is dat het Gödel theorema toont dat (1) er een goed gedefinieerde notie van 'wiskundige waarheid' is die van toepassing is op elke formule van het Russell systeem (hierna PM genoemd) ; en (2) dat als PM consistent is dat er dan sommige "wiskundige waarheden" onbeslisbaar zijn in die betekenis in PM. Dit is echter niet een wiskundig resultaat maar een metafysische claim. De wiskundige claim welke Gödel wel bewees was dat als P bewijsbaar is in PM dan is PM inconsistent en als ~P bewijsbaar is in PM, dan is PM ω-inconsistent. Wat Wittgenstein bekritiseerde is de filosofische naïviteit betrokken bij de verwarring tussen de twee, of in het denken dat de eerstgenoemde uit de laatstgenoemde volgt. ["a note on Wittgensteins 'notorious paragraph]".

Dus het bewijs uit de onvolledigheidstellingen laten volgens Wittgenstein zien dat het een wiskundige conclusie is dat zin P of de ontkenning ervan door het systeem niet kan worden bewezen. Maar de conclusie dat de vertaling van zin P, "P is niet bewijsbaar" waar is, is echter een metafysische conclusie, een conclusie die getrokken wordt buiten de context van het formele systeem. Deze metafysische conclusie wil Wittgenstein ook verder niet aanvallen. Mogelijk onder het motto *"Van dat, waarover niet kan worden gesproken, moet men zwijgen" [Tractatus, 7]*

Ik denk dat er wel nog een niet-filosofische conclusie uit de onvolledigheidstellingen kan worden getrokken. Het ontstaan van onbeslisbare zinnen doet het er op lijken dat de eerste orde rekenkunde niet volledig in één formeel systeem, eerste orde logica, kan worden uitgedrukt. In dit kader vond ik een interessante beschouwing van Carlo Celluli m.b.t. gesloten en open formele systemen waar ik later nog op terug zal komen;

AD 2) Als ons vermogen voor het bewijzen van feiten over natuurlijke getallen adequaat kan worden gerepresenteerd door een Turing machine, (een formeel consistent systeem) dan is er (a.g.v. de eerste Gödelstelling) een ware propositie over deze natuurlijke getallen die niet door ons vermogen geproduceerd (bewezen) kan worden.

Het is een open en tot op heden filosofische vraag of ons brein in rekenkundig vermogen gerepresenteerd kan worden door een Türinger machine. We betreden hier het domein van de filosofie van de geest. Gödel filosofische opstelling was dat hij meende dat het menselijke vermogen betreffende wiskundige inzicht de eindige Türinger machine overtrof. Maar hierover in het volgende item meer.
Feit is dat als de mens een Türinger machine is, dwz waarbij het vermogen voor het bewijzen van feiten over natuurlijke getallen is uitgedrukt in een eerste orde logica, er een naar zichzelf verwijzende zin is die niet bewezen kan worden, en de negatie van die zin evenmin. Echter dat het een ware zin betreft, in een soort uniforme betekenis van het woord 'waar', is volgens het betoog van de Putnam en Floyd's met betrekking tot de interpretatie van Wittgenstein's passage niet een wiskundige maar een metafysische stelling.

AD 3) A.g.v. 1 en 2 kan de mens niet alle eigenschappen van de feiten over de wiskunde (als formeel systeem) van de natuurlijke getallen kennen. [dwz. de mens (op zijn minst voorgesteld als Türinger machine) kan van de wiskunde als formeel systeem niet alle ware uitspraken kennen, en niet aantonen (bewijzen) dat de wiskunde consistent]

Interessant is dat Gödel meende dat er uiteindelijk geen onoplosbare wiskundige problemen voor de mens bestaan. Met ander woorden, de mens overtreft met zijn vermogens om de waarheid van wiskundige uitspraken te doorzien, in oneindige mate de eindige machine.
In *"On Kurt Gödel's Philosophy of Mathematics"* geeft Martin K. Solomon[10], op basis van een studie van alle door Gödel gepubliceerde werk en zijn aantekeningen een analyse van Gödel's filosofie van de wiskunde. Solomon's kenschets van de filosofie van de wiskunde van Gödel is een volgende;

"Gödel's filosofie is er één met een optimistische epistemologie, verkregen uit Kant's epistemologie betreffende de fysische wereld in termen van zintuiglijke fenomenen geplaatst tegenover de dingen in zichzelf (de noumenale wereld). Deze epistemologie is gesuperponeerd op een platoonse metafysica.[M.K. Solomon]"

Met Platoonse metafysica bedoelt hij dat abstracte objecten een objectieve existentie hebben. Met neo-Kantiaans bedoelt hij, verkregen uit de Kantiaanse epistemologie met als belangrijke wijziging, de verwijdering van het onkenbare van 'das ding an-sich'. Gödel is dus uiteindelijk optimistische over het door ons mensen leren kennen van het abstracte rijk van wiskundige waarheden.

"In zijn 1946 "remarks Before Princeton Bicentennial Conference" drukte Gödel optimisme uit t.a.v. de mogelijkheid dat we in de toekomst een concept van bewijsbaarheid ontdekken welke compleet is voor de wiskunde (i.e. verzamelingen leer), en derhalve absoluut [M.K. Solomon, pp 7]"

Vreemd is dat Gödel zijn argument betreffende "de schepper moet al de eigenschappen van schepping kennen" hiermee zelf onderuit haalt. Als Gödel gelijk heeft en de mens uiteindelijk alle eigenschappen van de wiskunde kan leren kennen, dan kan hij volgens dat arguemnt wel zelf de schepper zijn. Feit is wel dat hij ook bij het leren kennen van alle eigenschappen van de abstracte wereld *an-sich* uitgaat van het platonisme.

Ad 4) We bespreken nu het vierde punt. Een schepper kent noodzakelijk alle eigenschappen van zijn creaties, daar ze geen andere eigenschappen kan hebben dan de schepper ze gegeven heeft. Dus als uit de onvolledigheidstellingen volgt dat we van formele consistente systemen, uitgedrukt in eerste orde

logica, niet alle ware zinnen kunnen bewijzen, en elk redelijk wiskundig systeem in eerste orde logica kan worden uitgedrukt, dan kunnen we, voormits onze brein qua vermogens een Türinger-machine niet overstijgt, dus niet alle wiskundige eigenschappen kennen. De wiskunde kan daarmee dan niet, aldus Gödel, onze eigen creatie zijn.
Maar impliceert dit werkelijk, zoals Gödel dacht, de waarheid van wiskundig platonisme. Niet noodzakelijk. Kreisel meent dat er een optie was. Hij schrijft;

“ Ik neem niet aan dat als wiskundige objecten onze eigen constructies zijn, er moet worden verwacht dat we in staat zijn al hun eigenschappen te kennen; ik zie niet in waarom we zouden moeten verwachten dat we meer controle hebben over onze mentale producten dan de producten geproduceerd door spierkracht – welke soms zeer verrassend zijn.[Kreisel (1967[11])] ”

Gödel overwoog expliciet dit alternatief in de vorm van het volgende bezwaar: *“We bouwen bijvoorbeeld machines maar kunnen nog steeds niet hun gedrag in detail voorspellen. Maar dit bezwaar is niet erg sterk. Daar we de machines niet uit het niets produceren, maar uit een of ander materiaal.[Gödel, 1951]”*

Panu Raatikainen brengt hier tegen in verweer;

“Is Gödel’s antwoord hier erg overtuigend? Hij veronachtzaamd de mogelijkheid, een machine te ontwerpen, bijvoorbeeld een computer op het functionele niveau, dus door het schrijven van flowcharts, geheel onafhankelijk van een of andere materiële realisatie. Dan nog steeds, kan het heel duister zijn voor de programmeur, de schepper van het programma, waarom het gegeven programma stopt. En deze kwestie is geheel onafhankelijk van de hardware. Al met al denk ik dan ook dat het alternatief dat er voor de mens absoluut onoplosbare problemen zijn, niet noodzakelijkerwijs platonisme impliceert. [Panu Raatikainen[12]]”

Raatikainen heeft gelijk dat programmeurs met hun handen in het haar kunnen zitten als hun programma telkens ergens vastloopt. Als programmeur is mij dat ook vele malen overkomen. Echter telkens blijkt er dan uiteindelijk weer een logische verklaring te vinden te zijn. Om zich tegen dit soort argumenten als die van Raatikainen te kunnen wapenen zou Gödel dus eigenlijk moeten zeggen dat een schepper alle eigenschappen van zijn creaties, in ieder geval wel in theorie zou moeten kunnen kennen[13]. Het punt is namelijk dat in het geval van een formeel systeem er bewezen kan worden dat bepaalde eigenschappen juist binnen de theorie van het systeem onmogelijk gekend kunnen worden.

Ad 5): Derhalve kan de wiskunde geen creatie van onszelf zijn, want hoe kunnen wij het zijn die de waarheid bracht in een of ander propositie in afwezigheid van een bewijs voor die propositie.

Als alle premissen juist zijn zou deze conclusie moeten volgen. Maar zoals uit het voorgaande blijkt kunnen er zeker vraagtekens geplaatst worden bij de premissen. De onvolledigheid in de vorm van onbeslisbare meta-systematische zinnen van de onvolledigheidstellingen is een meta-systematische aangelegenheid. Men kan er over twisten of het wel redelijk is om dit soort zinnen in de gewone wiskunde toe te laten. In ieder geval blijkt wel dat als je dit soort zinnen toelaat, de eerste orde rekenkunde zich niet volledig in eerste orde logica laat uitdrukken. Maar om daar nu uit te concluderen dat we niet alle eigenschappen van de wiskunde kunnen kennen.
Maar toch aangenomen dat we niet alle eigenschappen van de wiskunde kunnen kennen, moet daar dan uit volgen dat wiskunde derhalve geen creatie kan zijn van onze geest? Gödel meende van wel. Volgens Rebecca Goldstein was het ondersteunen van de platonistische visie een belangrijk motief voor Gödel om zich aan het bewijs van de onvolledigheidstellingen te zetten.

“ Hij [Gödel] had zijn onvolledigheids theorema’s bedoelt als bewijs voor de filosofische positie waar hij zich met hart en ziel aan had verbonden: wiskundig platonisme, welke, in het kort, de overtuiging is dat er een van mensen onafhankelijke wiskundige werkelijkheid is welke onze wiskundige waarheden funderen; wiskundigen doen aan ontdekken, in plaats van aan het scheppen van wiskunde. Zijn onvolledigheidstellingen betreffen de onvolledigheid van onze door mensen gemaakte formele

systemen, niet van de wiskundige waarheid, of onze kennis ervan. Hij geloofde dat wiskundige werkelijkheid en onze kennis van de wiskundige werkelijkheid de formele regels van een formeel systeem overtreffen. Dus in tegenstelling tot de visie dat er geen waarheid is afgezien van de waarheden die we voor onszelf creëren, zodat het hele concept van waarheid desintegreert in een pluraliteit van gezichtspunten, geloofde Gödel dat waarheid – en met name wiskundige waarheid – onafhankelijk van enig gezichtspunt bestaat. Als er één man was die zich had verbonden aan de objectiviteit van waarheid, en aan de objectieve standaard van rationaliteit, dan was het Gödel. [pp 2, interview van RB met Rebecca Goldstein[14]].”

De vraag is of hij er in geslaagd is om het Platonisme met zijn onvolledigheidstellingen aan te tonen? Het is toch een hele sprong van Gödel's onvolledigheidstellingen, naar het platonisme als plausibele implicatie hiervan. De onvolledigheidstellingen van Gödel spreken over onvolledigheid in de meta-systematische betekenis van het woord. Dwz de onbeslisbare zin is een meta-zin en kunnen we dit soort zinnen wel tot de gewone wiskunde rekenen. En als we nu niet weten hoe we dit soort zinnen op een volledige wijze in een formeel systeem moeten onderbrengen, wellicht dat we andere mogelijkheden zullen vinden. We zouden in plaats van gesloten formele systemen de mogelijkheden van open formele systemen van de computationele logica hierop kunnen onderzoeken. (Ik kom daar later nog op terug). Wat Gödel wil aantonen is dat er één objectieve wiskundige waarheid bestaat. Maar als we een wiskunde opbouwen met een bepaalde set van axioma's , en vervolgens hetzelfde doen met een andere set van axioma's, dan kunnen er twee soorten van wiskunde ontstaan waarvan de uitspraken van de ene wiskunde die van de andere wiskunde tegenspreken. Hoe zit dat dan met die absolute en objectieve waarheid. Dat kan dan alleen maar te rijmen zijn met het platonisme als je zoiets als absoluut objectief ware axioma's hebt. Kortom, de argumentatie langs de lijn zoals die van hierboven impliceert volgens mij nog niet het wiskundig platonisme.
Maar we kunnen de argumentatie ook anders opzetten. We kunnen onderzoeken of de onvolledigheidstellingen de andere alternatieven zodanig in de problemen brengt, dat het platonisme nog de enige overgebleven plausibele optie is. Dat is wat ik nu heel globaal wil doen.

Consequenties van onvolledigheidstellingen voor alternatieven voor Platonisme[15].

De onvolledigheidstellingen impliceren niet direct het wiskundig platonisme dus daarom gaan we nu kijken of de stellingen andere filosofische visies m.b.t. de grondslagen van de wiskunde zodanig weerleggen dat het platonisme als enig redelijk alternatief overblijft.

Constructivisme ; formalisme en intuïtionisme

Het constructivisme betreft de visie dat wiskundige entiteiten alleen bestaan als ze kunnen worden geconstrueerd (of als er intuïtief van kan worden aangetoond dat ze bestaan), en dat wiskundige statements waar zijn alleen als er een constructief bewijs voor kan worden gegeven. Als zodanig is het dus het tegenovergestelde van platonisme (conceptueel realisme) welke het bestaan van wiskundige objecten en waarheden als onafhankelijk van ons denken en begrijpen ziet. Constructivisme omvat o.a. Formalisme en Intuïtionisme.

Formalisme

David Hilbert claimde dat de enige noodzakelijk fundering van de wiskunde moet bestaan uit (1) een formalisering ervan en (2) het leveren van het bewijs dat het aldus geproduceerde (gesloten) formele systeem consistent is. Getallen (formules en bewijzen) werden door hem louter beschouwd als sequenties van symbolen, en niet als objecten die naar iets verwijzen. Hilberts programma was er op gericht om de wiskunde op een "sound" grondvest te bouwen door het te reduceren (via de rekenkunde) tot consistente axioma's (series van symbolen) en afleidingsregels (regels voor symboolmanipulatie). Gödels volledigheidsstelling toonde aan dat delen van de formalisering van Hilberts programma onmogelijk waren, en velen zijn van mening dat Gödels stellingen de nekslag waren voor het formalistische programma van Hilbert.

Intuïtionisme
In 1910, stond L.E.J. Brouwer aan de wieg van een nieuwe beweging in de wiskunde, bekend als intuïtionisme. Deze beweging had zowel filosofische en methodologische componenten. Voor wat betreft de filosofische kant, gaf Brouwer een ietwat solipsistische beschrijving van wiskundige kennis in termen van intuïtieve constructies; ruwweg, iemands bewering dat een wiskundig statement waar is, staat gelijk aan de bewering dat men een mentale constructie heeft geëffectueerd welke in staat stelt te herkennen dat dit het geval is. Het intuïtionisme identificeert dus waarheid met weten dat iets waar is, dwz met bewijsbaarheid. Een wiskundige entiteit bestaat alleen als er een constructief existentie bewijs kan worden gegeven. Een wiskundig statement is waar alleen als er een bewijs van is, en onwaar alleen als er een bewijs van zijn ontkenning kan worden gegeven.
Wat is nu de consequentie van Gödel's onvolledigheidstellingen voor het intuïtionisme? De onvolledigheidstellingen vertellen dat waarheid in een effectief axiomatiseerbare theorie niet gelijk gesteld kan worden aan bewijsbaarheid. (bewijsbaarheid in de betekenis van een afleiding in een bepalend formeel systeem).
Voor Gödel is dit in ieder geval een belangrijk nadeel; hij klaagde dat de intuïtionistische notie van bewijsbaarheid en constructiviteit vaag zijn en scherpte en helderheid missen. Het kan niet worden begrepen in de betekenis van "afleiding in een bepalend formeel systeem", daar voor deze notie de axioma's van de intuïtionistische logica niet zouden gelden. Dus de notie van afleiding of bewijs moeten daarom opgevat worden als iets direct gegeven door intuïtie, zonder enige verdere verklaring. Volgens Gödel, mist deze notie van correct bewijs of constructief bewijs de vereiste precisie.

Intuïtionisten zouden de argumentatie kunnen omdraaien. Daar de onbeslisbare zin geen formeel bewijs kent binnen het formele systeem kunnen we niet zeggen dat de onbeslisbare zin waar is. Maar wat blijft is dat in het intuïtionisme de term "expliciete constructie" (bewijs) niet helder gedefinieerd is. Pogingen zijn gedaan om de concepten van Türinger-machine en computationele interpretatie te gebruiken om dit gat op te vullen. Dit leidt dan tot de claim dat alleen kwesties betreffende het gedrag van eindige algoritmes betekenisvol zijn, en in de wiskunde zouden moeten worden onderzocht, hetgeen weer geleid heeft tot de studie van de berekenbare getallen. *[Raatikainen "On the Philosophical Relevance of Gödel's Incompleteness Theorems"]*

Realisme ; platonisme, Logicisme, Conventionalisme, empirisme
Gesteld dan toch dat de ontdekking van onbeslisbare zinnen binnen een formeel systeem zou duiden op wiskunde die onafhankelijk is van het menselijk denken en creatie, dus een realisme, dan is platonisme niet enige mogelijkheid.

Logicisme is de claim dat substantiële (of alle) delen van de wiskunde kunnen worden gereduceerd tot de logica. Het was een visie die werd verdedigd door Frege en Russel. Kant had wiskundige waarheden geclassificeerd als a-priori synthetisch. Frege echter meende dat de waarheden van de wiskunde beschouwd moeten worden analytisch te zijn, waarbij de term 'analyticiteit' werd verbreed zodat het ook waarheden omvatten welke verkregen zijn uit definities van de concepten die betrokken zijn bij zuiver logisch redeneren. Het doel was om een systeem te leveren van primitieven en axioma's (welke na interpretatie logische waarheden leverde) zodanig dat alle rekenkundige noties definieerbaar zijn in het systeem, en alle theorema's van de rekenkunde theorema's van het systeem vormen. Als het succesvol zou zijn dan zou het verzekeren dat onze kennis van wiskundige waarheden een zelfde status zouden hebben als logische waarheden.
Gödel's onvolledigheidstellingen tonen nu aan dat niet alle rekenkundige 'waarheden' reduceerbaar zijn tot de standaard eerste orde logica, of tot enig recursief systeem (voormits meta-systematische zinnen worden toegestaan).
Aan de andere kant kan men de logicistische thesen beperken tot een bepaalde klasse van wiskundige waarheden zoals bekende waarheden of voor mensen te kennen waarheden, en / of men kan het bereik van de logica uitbreiden.
Deze laatste optie wordt bijvoorbeeld voorgesteld door Carlo Cellucci in *"Gödel's incompleteness theorem and the philosophy of open systems[16]"*. In dit paper stelt Celluci dat, hoewel Gödel's onvolledigheids theorema's wel zijn ingezet om Hilbert's formalistische programma te weerleggen, ze

niet gebruikt zijn om de inadequaatheid van het basisingrediënt van dit programma aan te tonen – het concept van een formeel gesloten systeem. Celluci pleit voor een open formeel systeem waarvan de belangrijkste eigenschap is dat ze altijd onderhevig zijn aan niet geanticipeerde uitkomsten in hun operatie en elk moment nieuwe informatie van buitenaf kunnen ontvangen.
Hij tracht aan te tonen dat de visie van Frege en Russell en Wittgenstein t.a.v. de logica als het universele systeem, impliceert dat logica een open systeem is.

"Het is een belangrijk onderdeel van Frege's conceptie van logica dat niets kan of hoeft te worden gezegd buiten het systeem: logica is het systeem en alles dat kan worden gezegd moet binnen het systeem worden gezegd…Een consequentie van deze positie is dat, omdat logica het universele systeem is waarbinnen elke rationeel discours zich dient te voltrekken, er geen rechtbank is buiten de logica die de logica kan beoordelen: geen metafysische vragen over de logica kunnen worden gesteld. [Celluci, 1992, pp2]".

Russell meende ook dat het niet mogelijk was metasystematische vragen over de logica te stellen. In de tweede editie van *"The principles of Mathematics"* (nota bene enkele jaren nadat Gödel zijn resultaten bekend had gemaakt) schrijft hij *"Het is moeilijk om een manier te zien voor het leveren van een bewijs dat het systeem resulterende uit een gegeven verzameling van premissen compleet is, in de zin dat het alles omarmt wat we aan logische proposities zouden willen opnemen[17] [Russell, 1937]".*
De vraag naar volledigheid in de meta-systematische betekenis was voor Russell niet aan de orde.

Frege stelde zich in de "Begrifschrift" de vraag *"als eenmaal een aantal principes zijn neergelegd als de fundametele principes of axioma's, waarop de gehele wiskunde rust, hoe kan men dan zeker zijn dat zulke principes compleet zijn?"*

Russel's antwoord op dit probleem was dat de enige vraag van volledigheid welke kan worden gesteld, de volledigheid in de empirische betekenis moet betreffen: zijn de regels uitputtend voor de intuïtieve wijzen van redeneren zoals gehanteerd in de wetenschap?
Celluci stelt daarmee dat al het werk van Frege en Russell, van de "Begriffschrift" tot aan de "Principia Mathematica" kan worden beschouwd als een stap in de richting van het op experimentele wijze vestigen van volledigheid. *"Waar Russell zich zorgen over maakte was niet dat het systeem van de Principia Mathematica onvolledig zou blijken te zijn in de meta-systematische betekenis, maar alleen dat het incompleet kon blijken te zijn in de empirische zin, i.e. dat sommige delen van de gewone wiskunde (en daartoe behoorde voor hem niet de meta-systematische proposities van Gödel's onvolledigheidstelling) niet zouden kunnen worden gereconstrueerd uit de axioma's van "Principia Mathematica [Celluci, 1991, pp3]".*
In de loop der tijd zijn er verschillende voorbeelden van wiskundige zinnen gevonden die formeel onbeslisbaar zijn in de elementaire getallen theorie, zoals Goodstein's theorema de Paris-Harrington variant van het eindige Ramsey theorema. De voorbeelden tonen dus dat de elementaire getallen theorie onvolledig is in de empirische betekenis.
Celluci meent verder dat Gödel met zijn onvolledigheidstellingen heeft aangetoond dat het concept van formeel systeem als een gesloten systeem inadequaat is voor de wiskunde. *"Maar de logische gemeenschap heeft niet geleerd van de lessen van Gödel – dat Hilbert's concept van formeel systeem inadequaat is. – en gaat door het te gebruiken of er geen onvolledigheidstelling is. Hedendaags werk in de computationele logica tracht deze trend te keren, door een nieuwer concept van formeel systeem als open systeem te ontwikkelen. Een systeem dat in staat is informatie welke voortdurende verandert en evolueert te hanteren. Men mag hopen dat dit werk zal slagen waar Gödel faalde, mensen overtuigen om Hilbert;s concept van formeel systeem te vervangen door een rijker concept, welke meer adequaat voor toepassingen in de werkelijke wereld. [Celluci, 1991, pp 11]"*

Hieruit zou men kunnen concluderen dat als men meta-systematische proposities ook rekent tot de wiskunde, en die op volledige wijze ondergebracht moet kunnen worden in formele systemen, het logicisme misschien nog steeds een antwoord zou kunnen formuleren op de problemen die door de onvolledigheidsstellingen zijn opgeworpen. Het mogelijke antwoord zou dan wellicht 'formele open systemen' kunnen zijn.

Conventionalisme
De beweging van de logisch empiristen (logisch positivisten) trachtte een beschrijving van de wiskunde in te passen in een bredere theorie van de wetenschappelijke praktijk. Ze hadden als doel de wetenschappelijke kennis onder te verdelen in analytische en synthetische componenten. De analytische component moest bestaan uit die waarheden waarvan de rechtvaardiging ruste op algemeen geaccepteerde conventies van de wetenschappelijke praktijk. Deze notie van analyticiteit was geleend van Wittgenstein die het gebruikte om logische tautologieën als waarheden te karakteriseren die simpelweg het gebruik van de taal reflecteren. De logisch positivisten breidde de notie verder uit, teneinde de wiskunde en wetenschappelijke definities en conventies te laten omvatten. Wiskunde als een product van linguïstische conventies te bezien, maakt het in zeker zin epistemologisch leeg. De logisch positivisten namen derhalve het niet-triviale deel van de wetenschappelijke kennis op in de synthetische component, waarvan dan de rechtvaardiging een of andere beroep op empirische waarneming vereiste.
Hoewel Gödel oorspronkelijk een lid was van de Wiener Kreiz, hield hij er een andere filosofie van de wiskunde op na. Gödel zocht weinig conflict met de leden van de Wiener Kreiz toch ontwikkelt hij in zijn Gibbs lezingen een aanval op het conventionalisme een visie (die hij toeschrijft aan Carnap, één van de leidende figuren van de Wiener Kreiz), waarin wiskundige proposities worden geïnterpreteerd als expressies van zekere aspecten van syntactische of linguïstische conventies.
Volgens Gödel kan een regel over de waarheid van zinnen syntactisch worden genoemd slechts dan als het duidelijk is vanuit zijn formulering, of als het op voorhand duidelijk is dat het niet de waarheid of onwaarheid van enige ‘feitelijke zinnen’ of ‘proposities die empirische feiten uitdrukken’ impliceert. Maar, zo gaat het argument verder, wordt aan deze vereisten alleen voldaan als de regel van de syntax consistent is, daar anders de regel alle zinnen zou impliceren, en ook de feitelijk zinnen. Daarom moet, als gevolg van Gödel’s tweede onvolledigheidstelling, de wiskunde die niet wordt ingevangen door de regel in kwestie, alsnog worden aangeroepen teneinde de regel te legitimeren. Het gevolg is dat dan de claim dat wiskunde alleen het resultaat is van syntactische regels wordt tegengesproken.
Hoewel Gödel deze aanval speciaal op Carnap richtte, hebben Goldfarb en Ricket beargumenteert dat Carnap’s radicale en ontwikkelde variant van het conventionalisme immuun is voor dit soort van directe weerlegging. [blz 3 “on the Philosophical relevance of Gödel’s Incompleteness Theorems”]. Ik ga hier nu niet verder op in maar het toont wel dat niet ieder overtuigd was van een weerlegging door Gödel’s onvolledigheidstellingen. Gödels argument lijkt wel fataal te zijn voor de meer standaard vormen van conventionalisme zoals die van Schlick en Hahn.

Wat in het paper “introductory notes” naar voren komt is dat Gödel in zijn Gibbs lezing niet in gaat op de door Quine drie maanden gepubliceerde aanval op analyticiteit. Ik zal dit tot slot nog wel doen.

Wiskundig Empirisme
Quine’s filosofie van de wiskunde is een onderdeel van zijn integrale Empirisme. Wiskundig Empirisme is een vorm van realisme welke ontkent dat de wiskunde a-priori kan worden gekend. Het zegt dat we wiskundige feiten net als de feiten in andere wetenschappen door empirisch onderzoek ontdekken. Een belangrijke vroege verdediger van deze positie is John Stuart Mill. Zijn visie werd breed bekritiseerd omdat het statements zoals “2+2=4” tot onzekere en contingente waarheden maakt. De hedendaagse empirist Quine, meent dat dat ook juist is en dat er inderdaad niet zoiets als objectieve kennis bestaat.

In zijn “Two dogma’s of empiricism”, verwerpt Quine de mogelijkheid om een scherp onderscheid te maken tussen de analytische en synthetische component. In plaats daarvan biedt hij een vorm van empirisme aan in welke de status van een individuele claim dient te worden beoordeelt in de context van de gehele theorie, een positie die bekend staat onder naam holisme.
De Wiskunde verliest in deze visie veel van zijn privilege status als a priori noodzakelijke kennis. Fundamentele wiskundige statements zijn statements waarvan we de waarheid onderschrijven, en ten opzichte waarvan we zeer terughoudend zijn om deze op te geven, maar welke uiteindelijk zullen

worden herzien om theoretische, en ervarings ontwikkelingen in de wetenschap in de toekomst beter te kunnen accommoderen.
Quine verwierp ook elke poging om wetenschap op een “eerste principe” te funderen, dwz op een voorafgaand metafysische preconceptie. In plaats daarvan is de taak van de filosoof, die binnen het frame van de hedendaagse wetenschappelijke kennis werkt, er een van methodologische hygiëne. Dwz het inspecteren en het zuiver houden van de taal en het zorg dragen voor conceptuele ondersteuning. Voor wat de wiskunde betreft, moeten we in Quine’s ogen alleen ontologische status toekennen aan die wiskundige objecten die nodig zijn om de beste wetenschappelijke theorieën die we vandaag de dag hebben betekenisvol te laten zijn. Zoals Hilary Putnam het zo kleurvol zegt *“het zou vreemd zijn de wet van de universele gravitatie te accepteren, welke stelt dat de verhouding van de krachten uitgeoefend door het ene object op het andere object proportioneel is met de verhouding van de producten van hun massa’s en het kwadraat van de afstand tussen hen, zonder daarbij te geloven in het bestaan van kwadraat of product.” [Putnam, Hilary (1971), Philosophy of Logic. New York: Harper & Rove.]* Dus wiskundige ontologische claims zijn gerechtvaardigd alleen doordat ze onvervangbaar zijn voor de wiskunde (Dit argument wordt ‘indispensability argument’ genoemd), Enige permissie voor abstractie is toegestaan indien het dient om de theorie aan te vullen en om een meer algemene empirische waarde van economie en eenvoud te ondersteunen.

Hoe ziet nu de holistische betekenistheorie van Quine eruit? Quine meent dat alle begrippen en zinnen van de taal (ook de wiskunde), hun betekenis ontlenen aan de plaats die ze innemen in een netwerk, waarin alle begrippen en zinnen met elkaar in verband staan. Een taal (ofwel theorie) is te vergelijken met een visnet; aan de uiteinden van het net zitten begrippen die in de eerste plaats thuishoren in waarnemingszinnen, zoals ‘rood’, ‘nat’ en ‘koud’; in het midden van het net zitten begrippen en zinnen die we onder alle omstandigheden voor waar houden, zoals ‘1+1=2’ en ‘a=a’.[18]
Quine meent daarbij dat dit hele netwerk onderbepaald is door de feiten. Dat wil zeggen dat verschillende onderling incompatibele theoretische netwerken allen passen op een zelfde “body of evidence”. In zoverre is dus het theoretische netwerk van de gehele taal (dus ook inclusief de wiskunde) empirisch onvolledig. Onvolledigheid, van wiskundige formele systemen zoals die blijkt uit de onvolledigheidstellingen vormen in het ondergedetermineerde “web of belief” dus daarop geen uitzondering.
Quine zal de platoonse visie van een objectieve niet-ruimtelijke tijdloze wereld van abstracte objecten verwerpen. Quine en Putnam verwerpen de term platonisme omdat een te openlijke ontologie impliceert. En dat is niet nodig voor de wiskundige praktijk in dienst van de wetenschap. De rechtvaardiging van de wiskunde komt indirect via de coherentie van onze wetenschappelijke theorieën als geheel. In hoeverre die kennis objectief en absoluut kan zijn? Niet, daar het netwerk van onze theorie als geheel onderbepaald is door de feiten.

Evaluatie

Van alle behandelde visies wordt feitelijk alleen het formalisme in het programma van Hilbert, gebaseerd op een gesloten formeel systeem, door de onvolledigheidstellingen volledig verworpen. Intuïtionisme heeft een probleem omdat bewijsbaarheid niet blijkt samen te vallen met waarheid. Doch daarbij moeten we wel de kanttekening maken dat dat probleem zich voordoet als we eisen dat formele systemen ook meta-systematische proposities (zoals die van de bewijsvoering van Gödel’s onvolledigheidsstelling) volledige en beslissend kunnen uitdrukken. Het Logicisme lijkt voor de onvolledigheidstellingen immuun daar we vanuit deze optiek met metasystematische vragen ons buiten de grenzen van de wereld begeven. Dat neemt niet weg dat de hedendaagse opvatting dat logicisme heeft gefaald, breed wordt gedeeld. De verschillende funderingen die voor de wiskunde zijn voorgesteld lijken zich te baseren op axioma’s die niet een zuiver “logisch” karakter hebben, zoals de bewering dat er een oneindige verzameling is. Zuiver conventionalisme waarin de waarheid van wiskundige proposities gedacht wordt geheel te danken te zijn aan de definities die de termen bevatten, en die gereduceerd kunnen worden tot tautologieën, lijkt het aan consistente syntax-regels te ontbreken zodat alsnog (a.g.v. Gödels tweede onvolledigheidsstelling) wiskundige axioma’s aangeroepen dienen te worden om de syntactische regels te legitimeren.

Het holistisch empirisme van Quine is immuun voor Gödel's onvolledigheidstelling daar het de rechtvaardiging van de wiskunde niet in abstracte meta-systematische maar in de coherentie van (natuur)wetenschappelijke theorieën ziet, en als zodanig indirect in empirisch onderzoek. En als gevolg van de onderbepaaldheid van de waarneming zijn onze theorieën sowieso niet objectief.

Conclusie

In het kader van de vraag of de onvolledigheidstellingen het onaannemelijk maken dat wiskunde slechts onze creatie is, en of ze ons dwingen tot de filosofische opvattingen van het wiskundig platonisme, zijn we begonnen met de beschouwing van een argument zoals gedestilleerd uit Gödel's Gibbs lezingen.
In een eerste oogopslag zou het aan de hand van de onvolledigheidstellingen kunnen lijken dat als onze formele systemen ons niet de gehele waarheid in de vorm van bewijzen vertellen, terwijl we intuïtief sommige van deze waarheden toch lijken te herkennen, dat er absolute en objectieve waarheid ergens achter verborgen moet liggen. Waarheid die we met behulp van de wiskunde moeten zien te ontdekken. Maar een kritische beschouwing zoals gegeven door die van Putnam, Floyd en Wittgenstein toont een ander perspectief waarin we zien dat in de 'geïnterpreteerde' versie van de verwoording van de volledigheidsstellingen reeds een metafysische vooronderstelling ligt opgesloten. Een vooronderstelling welke een platonisme plausibeler doet lijken. In Wittgensteins ogen moet deze metafysica vermomd als mathematische feiten, met gekunstelde bewijsvoering met meta-systematische zinnen als zodanig beoordeeld worden.
Helemaal 'by-passen' kan je de volledigheidsstelling nu ook weer niet. Dat hebben we in het tweede deel van het paper gezien waarin we de filosofische implicaties van de onvolledigheidstelling voor andere wiskundig filosofische opvattingen dan het platonisme globaal bekeken. De publicatie van Gödel's onvolledigheidstellingen waren waarschijnlijk de doodsteek voor Hilbert's formalistische programma. De twijfel blijft of we alle wiskunde (inclusief meta-systematische vragen) wel onder kunnen brengen in één gesloten formeel systeem, dwz een formeel systeem met een gefixeerd aantal axioma's. Mogelijk dat open formele systemen, waarin op dynamische wijze axioma's en andere informatie kan worden toegevoegd en gewijzigd, een oplossing biedt. Dit zou de menselijke vermogens van het brein in het bedrijven van wiskunde wel eens dichter kunnen benaderen. Open systemen spelen reeds een rol in de huidige ontwikkelingen van kunstmatige intelligentie en in het opkomen van een nieuw paradigma van de logica, als een alternatief voor wiskundige logica, namelijk computationele logica.

De vraag of de onvolledigheidstellingen het onaannemelijk maken dat wiskunde slechts onze creatie is zou ik willen beantwoorden met Neen. Reeds op voorhand, voordat ik begon met dit paper, sympathiseerde ik met het empiristische wiskunde en specifiek het Quiniaanse model. Dat is niet veranderd door het materiaal wat ik bestudeerd heb voor het schrijven van dit paper. Volledigheid van de wiskunde is er een die gesteld kan worden vanuit de mate van dienstbaarheid aan de (natuur)wetenschap. Dus geen volledigheid in metasystematische maar in empiristische zin. De vraag die moet worden gesteld is, kunnen we de wiskunde coherent inpassen in het hele netwerk van wetenschappelijke kennis? Kunnen we de met de wiskunde onze wetenschappelijke theorieën onderbouwen? De vraag of de wiskunde verder de waarheid van een absolute objectieve niet-ruimtelijke tijdloze wereld ontdekt, dus de vraag of platonisme plausibel is, lijkt me afgezien van irrelevant ook problematisch en moeilijk te rijmen met onze materialistisch wetenschappelijk wereldbeeld. Hoe zouden wij in contact moeten kunnen komen met zo'n objectieve en absolute wereld van abstracte entiteiten? Het meest aannemelijk lijkt me daarom een empiristische wiskunde. Wiskunde, een instrumenten , niet objectief, maar behulpzaam bij het verklaren van fenomenen in de fysische werkelijkheid. En er is maar één wereld en dat is de stoffelijke wereld van ruimte en tijd. En komt al de wiskundige waarheid voort uit de empirie? Ja, in een soort wisselwerking, want het beeld dat we vormen van de werkelijkheid, wordt ook bepaald door interpretatie vanuit ons eigen theoretisch raamwerk van dat moment.

***

Eindnoten en Literatuuropgave

---

[1] Syntax betreft de formele grammatica regels welke de constructies van termen en beweringen sturen. De semantiek geeft een beschrijving van hetgeen de syntactische elementen betekenen.

[2] Goldstein, Rebecca, 2005, "Incompleteness; The proof and Paradox of Kurt Gödel", WW Norton & Company

[3] Boolos, George, 1998, "Logic, Logic and Logic", Harvard University Press, Ch 7.

[4] Geraadpleegde bronnen;
[#http://users.ox.ac.uk/~jrlucas/Godel/implic.html], 2-07-06, "The implications of Gödel's Theorem"

[5] ω-consistentie is een technisch concept welke van toepassing is op een theorie T als, voor geen eigenschap P, T bewijst dat het elk specifiek nummer aan P ontbreekt, toch bewijst T dat er een natuurlijk getal; bestaat met P.

[6] Mautner, Thomas, 2000, Dictionary of Philosophy, Penguin Reference, London, "Liar Paradox" pp 316

[7] Wittgenstein, Ludwig, 1978, "Remarks on the foundation of Mathematics, revised edition, Cambridge, MA: MIT press.

[8] Putnam, Hilary / Floyd, Juliet, "A Note on Wittgenstein's 'notorius paragraph' about the Gödel Theorem".

[9] "Wij geloven dat deze 'notoire'paragraaf een filosofische claim van groot belang bevat welke bijna geheel gemist is in de ophef over, of Wittgenstein nu Gödel's (1ste) onvolledigheidstelling nu verkeerd heeft begrepen. Het doel van deze notitie is het zgn. loskoppelen van deze betwiste vraag (ofschoon het feit dat de critici van Wittgenstein 'm gemist hebben moet het zeker relevant zijn voor het dispuut). De claim is simpelweg deze: als men aanneemt (en a forteriori als men dat ook werkelijk ontdekt) dat ~P bewijsbaar is in Russell's systeem, dan moet men (of zoals Wittgenstein hier schrijft, zou men naar ik aanneem) de 'vertaling' opgeven van P door de [Nederlandse] zin 'P is niet bewijsbaar'.
Om te zien dat Wittgenstein hier iets op het spoor is, laat ons dan eens voorstellen dat een bewijs van ~P werkelijk is ontdekt. Neem verder voor dit moment even aan dat van Russell's systeem (vanaf nu 'PM' genoemd) nog niet is gebleken dat het inconsistent is. Echter, dan weten we nu dat, wegens de onvolledigheidstelling, dat PM ω-inconsistent is.
Maar wat laat ω-inconsistentie zien? ω-inconsistentie toont dat een systeem geen model heeft in welke het predikaat welke we hebben geïnterpreteerd als 'x is een natuurlijk getal', een extensie bezit welke isomorf is met de natuurlijke getallen.
Maar waarom 'vertaalde' we P met 'P is niet bewijsbaar in PM'? Wel, P heeft de vorm:
~(∃x(NaturalNo.(x).Proof(x,t)) waarin 't' een numerieke expressie afkort waarvan de waarde na berekening het Gödel nummer van P zelf blijkt te zijn. 'Proof' is de afkorting van een predikaat welke wordt verondersteld een effectieve berekenbare relatie te definiëren welke bestaat tussen twee natuurlijke getallen n,m in het geval n het Gödel nummer is van een bewijs waarvan de laatste regel de formule is met Gödel nummer m. En 'NaturalNo.(x)' is het predikaat van PM welke we interpreteren als 'x is een natuurlijk getal'.
Maar in het ontdekken dat PM is ω-inconsistent hebben we ontdekt dat:

1. 'NaturalNo(x)' kan niet zo geïnterpreteerd worden. In alle toegestane interpretaties van PM (alle interpretaties welke op zijn minst passen op één model van PM), zijn er entiteiten welke geen natuurlijke getallen zijn (en a forteriori, geen Gödel getallen van bewijzen).
2. Die predikaten van PM (e.g. 'Proof(x,t)') waarvan de extensies bewijsbaar oneindig zijn, en waarvan we geloven dat het oneindige deelverzamelingen zijn van N (de verzameling van alle natuurlijke getallen), hebben niet zulke extensies in enig model. In plaats daarvan hebben ze extensies welke onveranderlijk ook elementen bevat welke geen natuurlijke getallen zijn.

In het kort, de ‘vertaling’ van P als ‘P is niet bewijsbaar in PM’ is onhoudbaar in dit geval – net zo als Wittgenstein beweerde. Dit tast echter niet de correctheid van Gödel’s bewijs aan, immers niets in dat bewijs draait om zoiets als vertaling in gewone proza.
Wittgensteins doel is niet het weerleggen van het Gödel theorema, maar is het ‘by-passen’ ervan.
In aanvulling hierop willen we er op wijzen dat als PM werkelijk inconsistent is, en niet slechts ω-inconsistent, dan heeft het geen ‘toegestane interpretaties’, wat niet ontkent dat in verschillende contexten, en om verschillende redenen, we zijn zinnen zouden willen correleren met zinnen in het [Nederlands].” (Floyd J., Putnam H., “a Note on Wittgenstein’s ‘Notorious Paragraph’ about the Gödel Theorem’, pp1-3)

[10] Solomon, Martin K. , “On Kurt Gödel’s Philosophy of Mathematics”, Department of Computer Science and Engineering, Florida Atlantic University.

[11] Kreisel George, 1967, “Mathematical Logic: what has is done for the philosophy of mathematics?” In “On the Philosophical Relevance of Gödel’s Incompleteness Theorems”, by Panu Raatikainen.

[12] Raatikainen, Panu, “On the Philosophical Relevance of Gödel’s Incompleteness Theorems”

[13] Gödel zou hier trouwens wel kunnen tegenwerpen dat als een programmeur volledig in het duister tast waarom zijn programmatuur vastloopt, dat we dan te maken zouden kunnen hebben met het door Turinger geformuleerde ‘Halt-probleem’. Dit is ook een instantie van onbeslisbaarheid, dus onvolledigheid.

[14] [#http://www.butterfliesandwheels.com/articleprint.php?num=116] , 3-07-06.

[15] Geraadpleegde bronnen;

* Raatikainen, Panu, “On the Philosophical Relevance of Gödel’s Incompleteness Theorems” ,

* Avigad, Jeremy, “Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century” Published in “The Edingburgh Companion to the 20th Century Philosophies”, Edinburgh University Press.

[16] Celluci, Carlo (1991), “Gödel’s Incompleteness Theorem and the Philosophy of Open Systems”, Published in : D. Miéville (Ed.), Kurt Gödel: Actes du Colloque, Neuchâtel 13-14 juin 1991, Travaux de logique N.7, Centre de Recherches Semiologiques, Université de Neuchâtel, 1992, pp. 103-127

[17] Russel, B (1937), “The Principles of Mathematics”, Cambridge: Cambridge University Press, In Carlo Celluci, “Gödel’s Incompleteness Theorem and the Philosophy of Open Systems”

[18] Visser A, Lievers M. (2002), Reader Taalfilosofie, Universiteit van Utrecht,